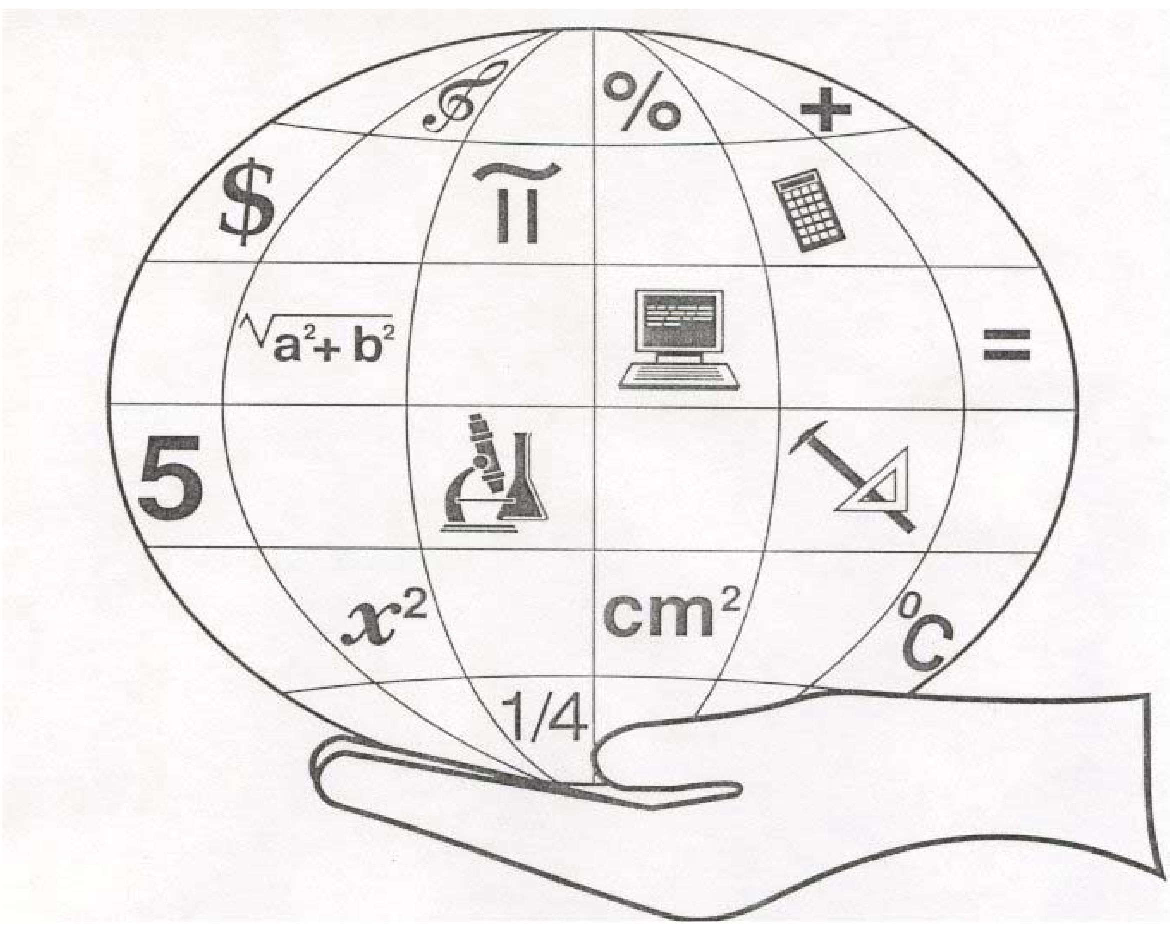
Ministère de l'Apprentissage
de la Saskatchewan

Mathématiques B30

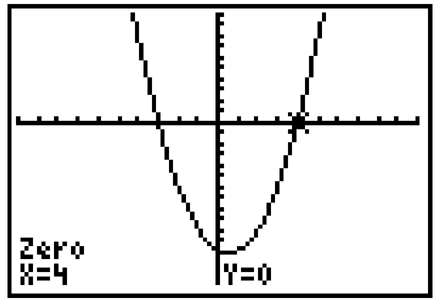
Équations du second degré

Module de l'élève



2002

Mathématiques B30



Équations du second degré

$$D = b^2 - 4ac$$

Module de l'élève

Bureau de la minorité de langue officielle

2002

Liste des objectifs du programme d'études de Mathématiques B30

Objectifs généraux

L'élève sera capable de:

- Démontrer l'habileté à résoudre des équations du second degré

- Écrire une équation du second degré en analysant les racines données

Objectifs spécifiques

L'élève sera capable de:

E.1 Résoudre des équations du second degré à l'aide de la formule quadratique

E.2 Résoudre des équations du second degré ayant des racines complexes

E.3 Résoudre des problèmes exigeant l'application des équations du second degré dans la vie courante

E.4 Déterminer la nature des racines d'une équation du second degré à l'aide du discriminant

E.5 Déterminer que la somme des racines d'une équation du second degré
$ax^2 + bx + c = 0$ égale $(-b/a)$, et que le produit des racines égale (c/a).

E.6 Écrire une équation du second degré, étant donné les racines

E.7 Résoudre des équations d'un degré supérieur à deux en les exprimant sous la forme d'une équation du second degré, ex.: $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

E.8 Résoudre des inéquations du second degré

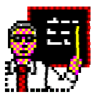
Remerciements

Certains exercices et exemples ont été adaptés, avec permission, des documents de B. Thiessen (Mathematics B 30, Saskatoon Public School Division, 1999) et Algèbre 30, manuel de l'élève, BMLO, 1988.

1. Résolution d'équations du second degré

Tu as déjà appris à résoudre des équations quadratiques en utilisant trois méthodes; la mise en facteurs, la complétion du carré et la formule quadratique. Revoyons-les à travers quelques exemples.

1.1 La mise en facteurs



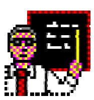
Exemple 1 : Résous l'équation $6a^2+13a+6=0$ à l'aide de la factorisation.

Solution

$$(3a+2)(2a+3)=0$$

$3a+2=0$ ou $2a+3=0$

$a=\frac{-2}{3}$ ou $a=\frac{-3}{2}$ → ensemble solution: $\left\{\frac{-2}{3},\frac{-3}{2}\right\}$



1.2 La complétion du carré

Exemple 2 : Détermine l'ensemble solution de l'équation $2x^2+16x+7=0$ en complétant le carré

Solution

$$x^2+8x+\frac{7}{2}=0$$

$$x^2+8x=-\frac{7}{2}$$

$$x^2+8x+16=-\frac{7}{2}+16$$

$$(x+4)^2=\frac{25}{2}$$

$$x+4=\pm\sqrt{\frac{25}{2}}$$

$$x=-4\pm\frac{5}{\sqrt{2}}=-4\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$\rightarrow$ ensemble solution: $\left\{\frac{-8+5\sqrt{2}}{2}, \frac{-8-5\sqrt{2}}{2}\right\}$

1.3 L'utilisation de la formule quadratique

Avant de montrer un exemple de résolution d'équation du second degré en utilisant la formule quadratique, il est important de reconnaître qu'en complétant le carré de l'équation générale $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$, on arrive à développer cette fameuse «formule quadratique» qui nous permet de résoudre n'importe quelle équation quadratique.

Voici le développement de la formule:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Plusieurs équations quadratiques ont des solutions dans l'ensemble des nombres réels. Toutefois, les équations quadratiques peuvent aussi avoir des solutions dans l'ensemble

des nombres complexes. Les deux exemples qui suivent illustrent ces deux possibilités.

Exemple 3 : Détermine l'ensemble solution de l'équation suivante en utilisant la formule quadratique:

$$x^2 = 8x - 9$$

Solution On doit tout d'abord s'assurer que l'équation est écrite sous la forme générale

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x^2 - 8x + 9 = 0$$

$$a = 1, b = -8, c = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{2(1)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 4 \pm \sqrt{7}$$

Exemple 4 :

La solution de $x^2 - 4x + 13 = 0$ est montrée ci-contre.

$$a = 1, b = -4, c = 13$$

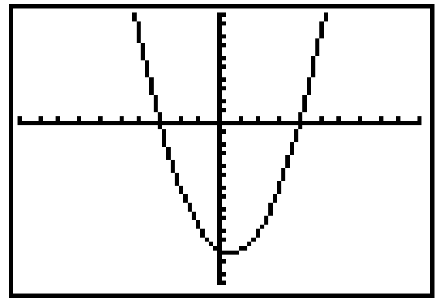
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

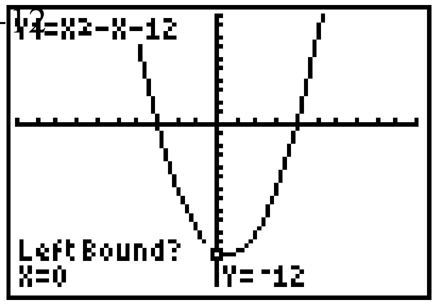
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

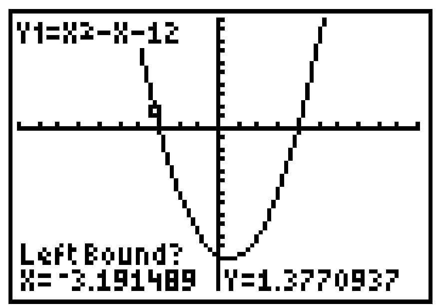
$$x = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$



Il est aussi possible d'utiliser la calculatrice à affichage graphique pour résoudre une équation du second degré. Par exemple, le graphique de l'équation $y = x^2 - x - 12$ possède l'allure suivante.

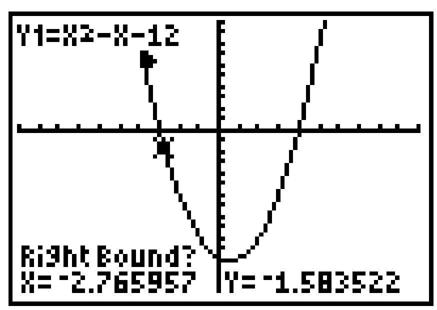


Il existe plus d'une méthode pour déterminer les zéros de l'équation, qui représentent son ensemble solution. Entre autres, nous pouvons déterminer un des zéros en appuyant sur y r et ensuite sur 2. L'écran suivant devrait apparaître:

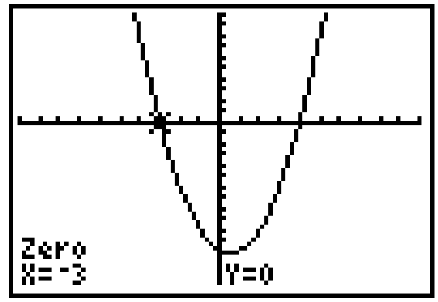


À l'aide de la flèche de déplacement gauche, il faut se déplacer de manière à ce que le curseur se trouve au-dessus de l'axe des x , comme le montre la figure ci-contre. Nous venons alors de déterminer la borne inférieure de l'intervalle à l'intérieur duquel nous voulons que la calculatrice détermine le zéro. Avant d'aller plus loin, il faut appuyer sur ,.

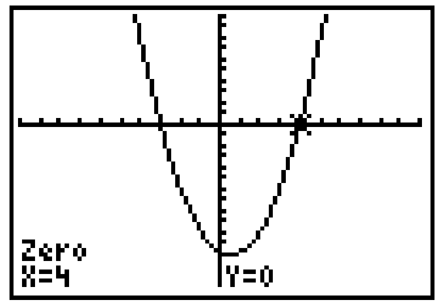
Pour indiquer la borne supérieure, il faut déplacer le curseur avec la flèche de droite jusqu'à ce que celui-ci se trouve sous l'axe des x, tel qu'illustré ci-contre. Il faut alors appuyer sur ¸.



La calculatrice demandera alors d'estimer la valeur. On peut entrer une valeur ou simplement appuyer de nouveau sur ¸ jusqu'à ce que la solution apparaisse.

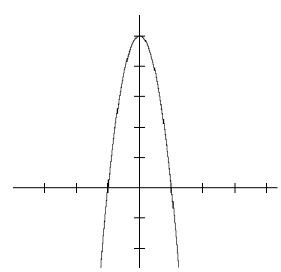


La calculatrice nous indique alors que la racine est située au point (-3,0). Une des solutions de l'équation est donc -3.



En répétant les mêmes étapes, nous trouverons que l'autre racine est 4. L'ensemble solution est donc $\{-3,4\}$.

Il est à noter que les valeurs de x qui rendent $f(x)$ égal à 0 ont des noms différents selon la situation. Lorsqu'on utilise le terme *racines*, on se réfère à une équation. Lorsqu'on utilise le terme *zéros*, on se réfère à une fonction. Lorsqu'on utilise le terme *abscisses à l'origine*, on se réfère à un graphique.

Équation	**Fonction**	**Graphique**
$ax^2 + bx + c = 0$	$f(x) = ax^2 + bx + c$	
racines	zéros	abscisses à l'origine

Exercice 1

Pour les questions suivantes, il est important de montrer les détails de tes calculs!

1. Résous par la mise en facteurs.

   a) $3a^2 - 7a + 4 = 0$
   b) $6y^2 = 7y + 3$
   c) $(y - 3)(2y + 3) = 5$
   d) $2x^2 + 5x + 3 = 0$
   e) $3c^2 = 5c$
   f) $18n^2 - 3n = 1$
   g) $10y^2 = y$
   h) $(x - 5)(x + 5) - x = -19$

2. Résous en complétant le carré.

   a) $a^2 - 10a + 21 = 0$
   b) $x^2 + 8x - 84 = 0$
   c) $b^2 + 3b - 8 = 0$
   d) $a^2 - 8a + 14 = 0$
   e) $x^2 - 7x + 5 = 0$
   f) $3x^2 + 2 = 9x$
   g) $4x^2 - 2x - 5 = 0$
   h) $3x^2 = 5(x - 1)^2$

3. Résous en employant la formule quadratique. Exprime les racines irrationnelles sous forme radicale simplifiée.

   a) $x^2 - x - 30 = 0$
   b) $5x^2 - x - 4 = 0$
   c) $4x^2 - 2 = 3x$
   d) $2a(a - 5) = -1$
   e) $2x^2 = 13(x - 1) + 3$
   f) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

g) $10a^2 = 1 - 2a$

h) $2x^2 + 6x + 3 = 0$

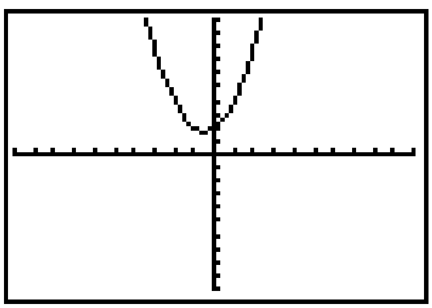
4. Résous en employant la formule quadratique. Exprime les racines imaginaires sous la forme ($a + bi$)

   a) $x^2 - 3x + 5 = 0$
   b) $6x^2 - 13x - 5 = 0$
   c) $3x^2 - 6x + 8 = 0$
   d) $2x^2 - 5x + 4 = 0$
   e) $5x^2 = 8(x - 3) - 12$
   f) $x(3x - 5) = -1$
   g) $2y^2 = 5y - 7$
   h) $0 = x^2 + x + 3$

5. a) Trouve les racines de l'équation: $x^2 - 6x + 8 = 0$.
   b) Trouve les racines de l'équation: $x^2 + 16 = 0$.
   c) Trouve les zéros de la fonction: $f(x) = x^2 - 4x - 2$.
   d) Trouve les zéros de la fonction: $f(x) = 5 - (x - 3)(2x + 3)$.
   e) Trouve les abscisses à l'origine de: $y = x^2 - x - 6$.
   f) Trouve les abscisses à l'origine de: $y = 3x^2 - 5x + 9$.

Discussion

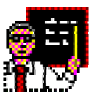
6. Un élève obtient le graphique suivant pour l'équation $y = x^2 + x + 2$:



Il conclut que l'équation $x^2 + x + 2 = 0$ n'a pas de racines. Son enseignante lui indique que sa conclusion n'est pas exacte. Explique.

2. Applications des équations du second degré

Les habiletés développées dans la section précédente vont nous permettre de résoudre des problèmes de la vie courante qui impliquent des équations quadratiques. Les exemples suivants montrent de telles applications.



Exemple 5 :

Une automobile et un camion font un trajet de 480 km. Ils partent en même temps. L'automobile fait 20 km/h de plus que le camion et arrive à destination 2 heures avant le camion. Trouve la vitesse de chaque véhicule.

Solution

Soit x, la vitesse du camion en km/h. Alors, la vitesse de l'automobile est de $\left(x+20\right)$ km/h.

Puisque le temps t que prend un objet roulant à une vitesse V sur une distance D est déterminé par la formule $t=\dfrac{D}{V}$, nous pouvons traduire l'énoncé du problème sous la forme suivante:

(Temps pris par l'auto) - (Temps pris par le camion) = 2 heures
ou

$$\frac{480}{x}-\frac{480}{x+20}=2$$

Il faut modifier l'équation de façon à éliminer le dénominateur. En multipliant chaque terme de l'équation par $x\left(x+20\right)$, nous obtenons:

$$\frac{480\cancel{(x)}(x+20)}{\cancel{x}} - \frac{480(x)\cancel{(x+20)}}{\cancel{(x+20)}} = 2(x)(x+20)$$

$$480x + 9600 - 480x = 2x^2 + 40x$$
$$2x^2 + 40x - 9600 = 0$$
$$(x+80)(x-60) = 0$$
$x = -80$ ou $x = 60$

Puisqu'il est impossible de rouler à -80 km/h, la seule réponse possible est que le camion roule à 60 km/h et l'automobile à 80 km/h.

Exemple 6 : La longueur d'un rectangle est 7 cm de plus que les quatre cinquièmes de sa largeur. Si l'aire du rectangle est de 785 cm^2, trouve les dimensions de celui-ci.

Solution Soit x, la largeur du rectangle. Alors, la longueur du rectangle est $\frac{4}{5}x+7$.

$$\therefore x\left(\frac{4}{5}x+7\right)=785$$

$$\frac{4}{5}x^2+7x=785$$

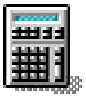
$$\frac{4}{5}x^2+7x-785=0$$

$$4x^2+35x-3925=0$$

À l'aide de la formule quadratique, nous trouvons:

$$\frac{-35\pm\sqrt{35^2-4(4)(-3925)}}{8}=\frac{-35\pm 253,03}{8}$$

Les deux racines sont -36 et 27,25. La valeur négative ne peut être retenue puisque la largeur du rectangle ne peut pas être négative. La largeur est donc 27,25 cm alors que la longueur est $\left(\frac{4}{5}\right)(27,25)+7=28,80$ cm. À toi de vérifier!



Exercice 2

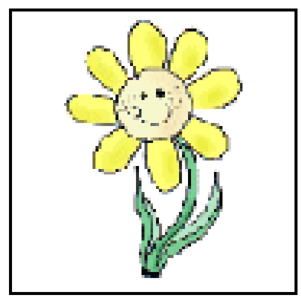
Résous les problèmes suivants. N'utilise qu'une variable. Résous l'équation quadratique que tu établis en utilisant la méthode de ton choix.

1. Si l'on soustrait un nombre de son carré le résultat est 110. Trouve le nombre.

2. La somme de deux nombres est 17 et la somme de leurs carrés est 149. Trouve les nombres.

3. La somme des carrés de 3 nombres entiers pairs consécutifs est 596. Trouve les nombres.

4. Le produit de 2 entiers pairs consécutifs est 440. Trouve les nombres.



5. La différence entre 2 entiers est 4 et leur produit est 96. Trouve les nombres.

6. Une cour mesure 15 m sur 20 m. Tout autour de la cour, mais à l'intérieur, on veut construire un jardin d'une largeur uniforme. Si l'aire occupée par le jardin est la même que l'aire du gazon qui occupe l'intérieur de la cour, trouve la largeur du jardin.

7. Trouve 3 entiers consécutifs tels que le produit du premier et du troisième moins le second est un de plus que 10 fois le troisième.

8. Trois entiers pairs consécutifs sont tels que le carré du troisième est 76 de plus que le carré du second. Trouve les entiers.

9. Si on ajoute 6 m à chaque côté d'un carré, l'aire devient 144 m^2. Trouve la longueur d'un côté du carré initial.

10. Un village se proposait de construire une patinoire de 30 m sur 60 m. Une coupure budgétaire les a obligé à réduire l'aire totale de la patinoire à 1000 m^2. Pour accomplir cela, on a réduit le plan en enlevant une lisière uniforme d'un bout et d'un côté. Trouve la largeur de la lisière enlevée.

11. On veut doubler l'aire d'un terrain, dont les dimensions sont 30 m sur 20 m, en ajoutant une lisière à un bout et une autre de largeur égale sur un des côtés. Trouve la largeur de la lisière.

12. Un jardin rectangulaire de 25 m sur 50 m est agrandi en ajoutant une lisière de largeur uniforme tout autour du jardin. Cela augmente la superficie de 400 m^2. Trouve la largeur de la lisière ajoutée.

13. Un jardin de fleurs rectangulaire de 20 m sur 28 m est entouré à l'extérieur d'un trottoir de largeur uniforme. Si l'aire totale du trottoir et du jardin est de 1008 m^2, trouve la largeur du trottoir.

14. Deux trains A et B partent en même temps, l'un vers le nord et l'autre vers l'est. Le train B se déplace à 5 km/h de plus que le train A. Si, après 2 heures, ils sont à 50 km de distance l'un de l'autre, trouve la vitesse de chaque train.

15. Le train A se déplace à 14 km/h de plus que train B. Les deux partent en même temps, l'un vers le sud et l'autre vers l'ouest. Trouve la vitesse de chaque train si, après 5 heures, ils sont à 130 km l'un de l'autre.

16. Un groupe d'élèves ont besoin de partager 140 $ pour acheter un bateau d'occasion. Ils décident de se cotiser. À la dernière minute 3 des élèves décident de ne pas participer, augmentant ainsi la part de chacun des autres de 15 $. Combien d'élèves étaient dans le groupe initial?

17. Les membres d'un groupe se partagent les frais d'une excursion en autobus qui coûte 540 $. Cinq des personnes ne peuvent finalement pas y participer, ce qui augmente le coût pour les autres de 1,50 $ par personne. Combien de personnes ont fait le voyage?

18. En augmentant sa vitesse moyenne de 3 km/h, un autobus prendrait une heure de moins pour faire un trajet de 90 km. Trouve la vitesse moyenne de l'autobus.

19. Après avoir parcouru 126 km en automobile, Jean constate que s'il avait augmenté sa vitesse de 8 km/h, il aurait pu faire le même trajet en une heure de moins. Trouve sa vitesse moyenne.

20. Un triangle rectangle a un périmètre de 36 cm et son hypoténuse mesure 15cm. Trouve la longueur des 2 autres côtés.

21. L'hypoténuse d'un triangle rectangle mesure 4 cm de plus que la base. Le troisième côté mesure 2 cm de plus que la base. Trouve la longueur de chaque côté.

3. La nature des racines d’une équation du second degré

Le discriminant nous permet de connaître la nature des racines d’une équation du second degré. Rappelons-nous que l’équation quadratique générale $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ où $a,\ b, c\ \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, possède les deux racines suivantes:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Définition du discriminant

Le **discriminant**, D, d’une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où $a, b, c\ \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ est donné par la formule $D = b^2 - 4ac$.

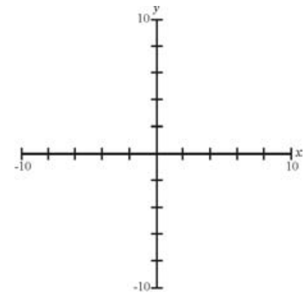
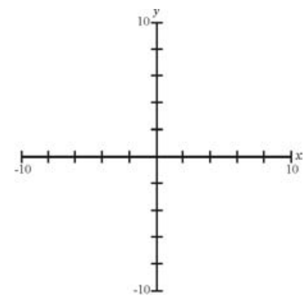
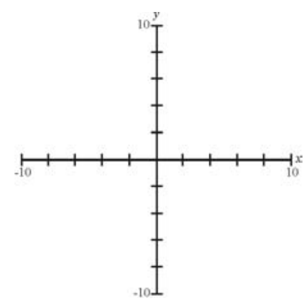
Exemple 7 : Détermine le discriminant de l’équation $y = 2x^2 - 11x + 10$

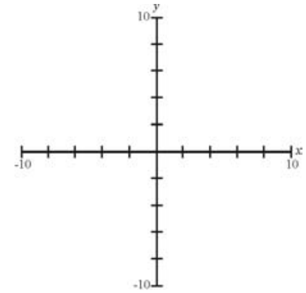
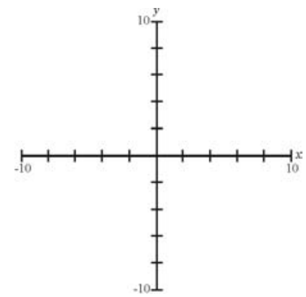
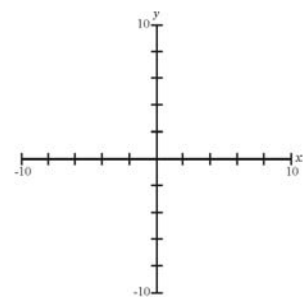
Solution Puisque le discriminant d’une équation du second degré est donné par $D = b^2 - 4ac$, nous obtenons que

$$D = (-11)^2 - 4(2)(10) = 41$$

Le discriminant d’une équation quadratique est utile puisque cette expression nous donne de l’information concernant ses racines sans qu’il soit nécessaire de les trouver. Afin de tirer les conclusions concernant la relation entre la nature des racines et la valeur du

discriminant, nous allons nous prêter à un exercice pratique. Complète le tableau de la page suivante et réponds aux questions qui suivent ce tableau.

Fonction	Racines	Discriminant $b^2 - 4ac$	Esquisse du graphique
$f(x) = x^2 - 3x + 2$			
$f(x) = 6x^2 - 5x - 9$			
$f(x) = x^2 + 4x + 4$			

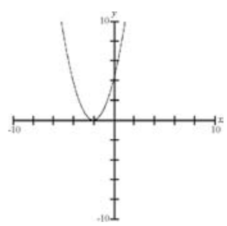
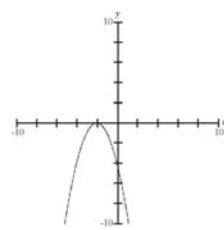
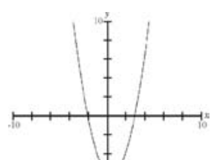
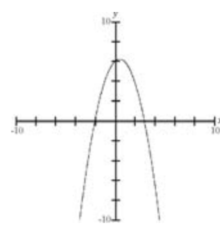
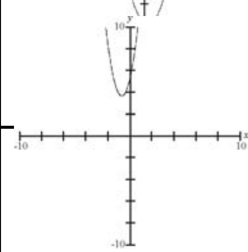
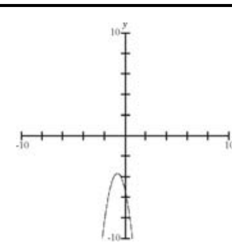
$f(x) = -4x^2 + 12x + 9$			
$f(x) = x^2 - 3x + 5$			
$f(x) = -2x^2 - 5$			

Après avoir complété le dernier tableau, quelles sont tes observations au sujet de la nature des racines par rapport au discriminant.

Le tableau ci-dessous établit la relation entre la valeur du discriminant et la nature des racines:

$D = b^2 - 4ac$	Racines réelles ou imaginaires ?	Racines égales ou distinctes ?	Racines rationnelles ou irrationnelles ?
$D = 0$	**réelles**	**égales**	**rationnelles**
$D > 0$ (carré parfait)	**réelles**	**distinctes**	**rationnelles**
$D > 0$ (pas carré parfait)	**réelles**	**distinctes**	**irrationnelles**
$D < 0$	**imaginaires**	**distinctes**	**----------------------**

On peut aussi établir la relation entre la valeur du discriminant et l'allure du graphique d'une fonction du second degré.

$D = b^2 - 4ac$	Esquisse d'un graphique avec un tel discriminant
D = 0	 ou 
D > 0	 ou 
D < 0	 ou 

Exemple 8 : Résous l'équation quadratique $x^2 + 6x - 16 = 0$ et détermine la nature des racines.

Solution $x^2 + 6x - 16 = 0$

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-6 \pm 10}{2} = -3 \pm 5$$

Ensemble solution = $\{2, -8\}$

Puisque le discriminant est égal à 100, nous pouvons dire que cette équation possède deux racines réelles (rationnelles) distinctes.

Exemple 9 : Détermine la nature des racines de l'équation du second degré $4x^2 - 10x + 7 = 0$

Solution Le déterminant de cette équation est donné par $b^2 - 4ac$ où $b = -10$, $a = 4$ et $c = 7$. Ainsi, $(-10)^2 - 4(4)(7) = -12$. Le déterminant étant négatif, nous devons conclure que les deux racines sont des conjugués complexes.

Exemple 10 : Trouve la valeur de k pour laquelle l'équation donnée aura deux racines réelles distinctes lorsque $2x^2 - 3x + k = 0$.

Solution Il y a deux racines réelles distinctes lorsque le discriminant est supérieur à zéro. Ainsi,

$$D = (-3)^2 - 4(2)k$$
$$D = 9 - 8k$$

Il faut donc que $9 - 8k > 0$ ou que $k < \frac{9}{8}$. Il y aura deux racines réelles distinctes si $k < \frac{9}{8}$.

Exercice 3

1. Trouve la valeur du discriminant des équations suivantes.

   a) $x^2 + 5x - 2 = 0$
   b) $2y^2 - 5y + 3 = 0$
   c) $64y^2 - 16y + 1 = 0$
   d) $y^2 + 3 = 0$

2. Pour chacune des équations suivantes, calcule la valeur du discriminant et décris la nature de ses racines.

   a) $x^2 - 2x - 35 = 0$
   b) $x^2 - 10x + 25 = 0$
   c) $3y^2 + 11y + 4 = 0$
   d) $x^2 + 4x - 5 = 0$
   e) $-3t^2 + 4t + 1 = 0$
   f) $3x^2 + 7 = 0$

3. Trouve la ou les valeurs de k pour lesquelles l'équation donnée aura des racines de la nature spécifiée.

   a) $kx^2 + 3x + 6 = 0$; 2 racines réelles distinctes
   b) $\mathrm{k}x^2 + 2x + 4 = 0$; 2 racines réelles égales

c) $kx^2 - 5x + 6 = 0$; 2 racines imaginaires distinctes
d) $3x^2 + 6x + k = 0$; 2 racines imaginaires distinctes
e) $3x^2 - kx + 4 = 0$; 2 racines réelles égales
f) $2x^2 - 3x + (k + 1) = 0$; 2 racines réelles distinctes

4. Somme et produit des racines d'une équation du second degré

4.1 Vérification des racines d'une équation quadratique

Comme pour toute équation, on peut vérifier si les racines d'une équation quadratique sont justes en les substituant dans l'équation.

Toutefois, il y a une autre façon qui est généralement plus facile pour les équations quadratiques, surtout si les racines sont irrationnelles. Cette méthode est basée sur le théorème suivant.

Théorème des relations entre les coefficients et les racines
r_1 et r_2 sont les racines de l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0,\ (a \neq 0)$, si et seulement si $r_1 + r_2 = -b/a$ et $r_1 r_2 = c/a$

Par exemple, est-ce que 6 et -1 sont les racines de $x^2 - 5x - 6 = 0$? Commençons par vérifier que la somme des racines donne bien $-b/a$. La somme des deux racines est 5 et nous remarquons que le rapport
$-b/a$ = -(-5)/1 = 5. De plus, nous trouvons que le produit des deux racines est -6, ce qui est égal à c/a = -6/1 = -6.

4.2 Somme et produit des racines d'une équation quadratique

L'extension de ce théorème nous permet de trouver la deuxième racine d'une équation du second degré si la première est connue. On peut également écrire l'équation d'une relation du second degré lorsque ces deux racines sont connues suite aux constations suivantes:

Somme et produit des racines d'une équation du second degré

Une équation quadratique sous la forme générale $ax^2 + bx + c = 0$ peut prendre la forme $x^2 - (\textit{somme des racines})x + (\textit{produit des racines}) = 0$ ou $x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$.

Les exemples suivants illustrent l'utilité de cette relation.

Exemple 11 : Si 2 est une des racines de $2x^2 - 5x + 2 = 0$, quelle est l'autre racine ?

Solution Soit r_1 et r_2, les racines de cette équation. Nous savons que $r_1 = 2$. La somme des racines égale $-b/a$ = -(-5)/2 = 5/2.

Ainsi, $2 + r_2 = \frac{5}{2}$ et $r_2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$.

Nous aurions pu trouver la seconde racine en utilisant le produit des racines au lieu de la somme.

Exemple 12 : Trouve l'équation du second degré dont les racines sont $\frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$.

Solution

$$r_1 + r_2 = \frac{3+\sqrt{41}}{4} + \frac{3-\sqrt{41}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$(r_1)(r_2) = \left(\frac{3+\sqrt{41}}{4}\right)\left(\frac{3-\sqrt{41}}{4}\right) = \frac{9-41}{16} = -2$$

Donc, l'équation est: $x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0$ ou sous la forme générale $2x^2 - 3x - 4 = 0$

Exercice 4

1. Utilise ta connaissance de la somme et du produit des racines d'une équation quadratique pour vérifier si les valeurs données sont les solutions de l'équation donnée.

   a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ ▸ 6, −1

   b) $30x^2 + 13x - 10 = 0$ ▸ $\frac{2}{5}, -\frac{5}{6}$

   c) $x^2 + 6x + 4 = 0$ ▸ $-3+\sqrt{6},\ -3-\sqrt{6}$

   d) $7x^2 + 5x - 1 = 0$ ▸ $\frac{-5+\sqrt{53}}{14}, \frac{-5-\sqrt{53}}{14}$

   e) $x^2 + 2x + 4 = 0$ ▸ $1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$

   f) $x^2 - 9 = 3x$ ▸ $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}, \frac{3-3\sqrt{5}}{2}$

2. Détermine la somme et le produit des racines des équations suivantes sans les résoudre.

   a) $x^2 + 5x - 2 = 0$
   b) $2x^2 + 8x - 3 = 0$
   c) $3y^2 - 8y = 35$
   d) $5y^2 = 3$
   e) $3x^2 - 7x + 3 = 0$
   f) $5y^2 - 3y = 0$

3. Pour chacune des équation suivantes, on donne une des racines. Trouve l'autre racine en utilisant la somme ou le produit des racines.

   a) $x^2 + 6x + 9 = 0$; −3
   b) $x^2 + 8x + \mathrm{m} = 0$; 2
   c) $2x^2 + \mathrm{m}x + 3 = 0$; $\frac{1}{2}$
   d) $3x^2 + 2x + \mathrm{m} = 0$; −1

4. Pour chacune des équations suivantes, on donne une racine. Trouve l'autre racine et la valeur de m.

   a) $x^2 - 5x + \mathrm{m} = 0$; 2
   b) $2x^2 + 16x + \mathrm{m} = 0$; $-4 + \sqrt{7}$
   c) $mx^2 - 17x + 33 = 0$; 3
   d) $6x^2 + mx - 5 = 0$; 3
   e) $4x^2 + mx - 3 = 0$; $\frac{3}{2}$
   f) $x^2 + mx + 2i = 0$; $1 + i$

5. Écris une équation quadratique, de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, pour laquelle on connaît la somme et le produit des racines.

   a) somme = -5
      produit = $\frac{1}{2}$

   b) somme = 3
      produit = -6

   c) somme = $\frac{-3}{4}$
      produit = $\frac{1}{8}$

   d) somme = 0
      produit = 6

6. Écris une équation quadratique, de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, pour laquelle on connaît les racines.

   a) 8, -2
   b) 3, -3
   c) $-4, -4$
   d) $2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$
   e) $3i$, $-3i$
   f) $\frac{5 - 3i}{4}, \frac{5 + 3i}{4}$

5. Solution d’équations en forme quadratique

Certaines équations non quadratiques peuvent être résolues en se servant des techniques utilisées pour résoudre des équations quadratiques. On dit qu’elles sont en forme quadratique.

Il faudrait faire une vérification de toutes les solutions.

Exemple 13 :Résous $(x^2+3)^2 - 5(x^2+3) = 6$

Solution ▸ Soit $a = x^2 + 3$

$a^2 - 5a = 6$

$a^2 - 5a - 6 = 0$

$(a - 6)(a + 1) = 0$

$a - 6 = 0$ ou $a + 1 = 0$

$a = 6$ ou $a = -1$

▸ Substitue $x^2 + 3$ pour a.

$x^2 + 3 = 6$ ou $x^2 + 3 = -1$

$x^2 = 3$ ou $x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{3}$ ou $x = \pm\sqrt{-4}$

√ $x = \pm 2i$

√

Exemple 14 : $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

Solution ▸ Soit $a = \sqrt{x}$

$a^2 - 3a - 4 = 0$

$(a - 4)(a + 1) = 0$

$a - 4 = 0$ ou $a + 1 = 0$

$a = 4$ ou $a = -1$

▸ Substitue a par $\sqrt{x}$.

$\sqrt{x} = 4$ ou $\sqrt{x} = -1$

$x = 16$

√ *pas une solution!*

Exercice 5

1. Résous les équations suivantes.

   a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
   b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
   c) $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$
   d) $u + 2 = 3\sqrt{u}$
   e) $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 = 0$
   f) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$
   g) $4n^8 - 37n^4 + 9 = 0$
   h) $36x^{-4} - 5x^{-2} - 1 = 0$
   i) $\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{1+x}{x}\right) + 3 = 0$
   j) $(x^2 + x - 8)^2 - 2(x^2 + x - 8) - 8 = 0$

6. Les inéquations quadratiques

On peut résoudre une inéquation quadratique de deux façons:

→ par la méthode graphique;

→ par la méthode algébrique.

En examinant un graphique dessiné à la main ou à l'aide de la calculatrice à affichage graphique, on peut résoudre pour x lorsque

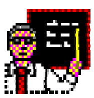
→ $f(x) = 0$

→ $f(x) < 0$

→ $f(x) > 0$

→ $f(x) \leq 0$

→ $f(x) \geq 0$.



Exemple 15 : Si $f(x) = x^2 - 2x - 35$, trouve les valeurs de x satisfaisant les conditions suivantes:

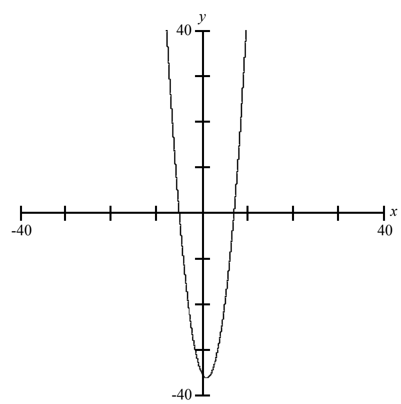
a) $x^2 - 2x - 35 > 0$

b) $x^2 - 2x - 35 < 0$

c) $x^2 - 2x - 35 \geq 0$

d) $x^2 - 2x - 35 \leq 0$

On trouve les zéros afin de faire une esquisse du graphique. On remarque que les abscisses à l'origine du graphique sont -5 et 7 et l'ensemble solution d'une inéquation se composera des valeurs de x situées soit dans l'intervalle -5 à 7 soit à l'extérieur de cet intervalle. En observant le graphique ci-contre, on identifie les solutions suivantes:



a) Le symbole d'inégalité indique que -5 et 7 ne feront pas partie de la solution. Il faut alors déterminer si ce sont les valeurs comprises entre -5 et 7 qui formeront l'ensemble solution ou les valeurs situées sur l'axe des x à l'extérieur de cet intervalle. Prenons une valeur de x située dans l'intervalle telle que $x = 0$. L'inéquation

devient $(0)^2 - 2(0) - 35 > 0$, ce qui est faux.

L'ensemble solution comprendra donc les valeurs de x inférieures à -5 et supérieures à 7 telles que $\{x \mid x < -5 \; ou \; x > 7\}$.

b) Encore une fois, nous pouvons remplacer x dans l'inéquation par 0 et vérifier si les valeurs de x comprises entre -5 et 7 satisfont l'inéquation. Puisque $(0)^2 - 2(0) - 35 < 0$ est vrai, nous pouvons déterminer l'ensemble solution comme étant $\{x \mid -5 < x < 7\}$. La même démarche nous permet de trouver les deux autres ensembles solutions qui suivent.

c) $\{x \mid x \le -5 \; ou \; x \ge 7\}$

d) $\{\{x \mid -5 \le x \le 7\}$

En se basant sur le théorème suivant, on peut facilement résoudre pour x de façon algébrique.

Pour toute valeur de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$,

1) Si $ab > 0$,
alors $a > 0$ et $b > 0$ (a et b sont positifs)
ou $a < 0$ et $b < 0$ (a et b sont négatifs).

2) Si $ab < 0$,
alors $a < 0$ et $b > 0$ (a est négatif et b est positif)
ou $a > 0$ et $b < 0$ (a est positif et b est négatif).

Exemple 16 : Détermine l'ensemble solution de $x^2 + 2x - 15 > 0$

Solution

$(x-3)(x+5)>0$

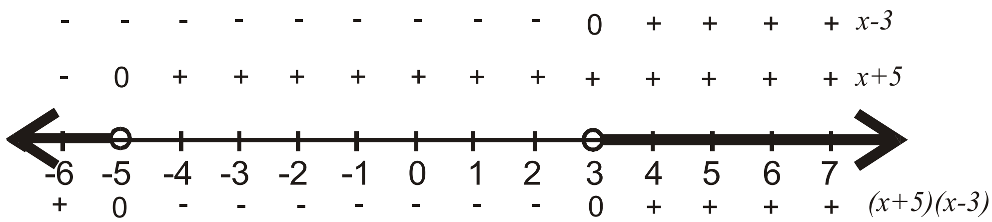
$(x-3)>0$ et $(x+5)>0$ <u>*ou*</u> $(x-3)<0$ et $(x+5)<0$

$x>3$ et $x>-5$ <u>*ou*</u> $x<3$ et $x<-5$

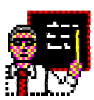
$x>3$ <u>*ou*</u> $x<-5$

Alors, l'ensemble-solution est $\{x \mid x>3 \text{ ou } x<-5)\}$.

On peut représenter l’ensemble solution sur une droite numérique des valeurs de x.



Sur cette droite, nous avons également effectué une analyse de signes. En effet, nous pouvons suivre le comportement de chaque partie de l’expression en fonction du signe de celle-ci au fur et à mesure que la valeur de x change. Sous la droite, nous



avons représenté le signe du produit de $(x+5)(x-3)$.

Exemple 17 : Détermine l’ensemble solution de l’inéquation suivante
$x^2 + 2x - 15 < 0$

Solution $(x - 3)(x + 5) < 0$

$(x - 3) > 0$ et $(x + 5) < 0$ *ou* $(x - 3) < 0$ et $(x + 5) > 0$

$x > 3$ et $x < -5$ *ou* $x < 3$ et $x > -5$

impossible *ou* $-5 < x < 3$

Alors, l’ensemble solution est: $\{x \mid -5 < x < 3\}$.

Exercice 6

1. Trace le graphique de $y = x^2 - 3x - 4$ pour déterminer les ensembles solutions suivants.

   a) $x^2 - 3x - 4 = 0$
   b) $x^2 - 3x - 4 > 0$
   c) $x^2 - 3x - 4 < 0$
   d) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$
   e) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$

2. Résous et trace le graphique de l'ensemble solution des inéquations suivantes sur une droite numérique.

   a) $x(x + 2) < 8$
   b) $2x^2 + 7x \leq 15$
   c) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$
   d) $3x^2 - 3 > -8x$
   e) $x(x + 12) \leq -27$
   f) $x^2 - 3x < 0$
   g) $10x^2 + 7x \geq 12$
   h) $x^2 - 2x - 8 > 0$

Réponses

Exercice 1

1. a) $\frac{4}{3}$, 1 b) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ c) $\frac{7}{2}$, −2 d) $-\frac{3}{2}$, −1

   e) 0, $\frac{5}{3}$ f) $-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ g) 0, $\frac{1}{10}$ h) 3, −2

2. a) 3, 7 b) 6, −14 c) $\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$ d) $4 \pm \sqrt{2}$

   e) $\frac{7 \pm \sqrt{29}}{2}$ f) $\frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$ g) $\frac{1 \pm \sqrt{21}}{4}$ h) $\frac{5 \pm \sqrt{15}}{2}$

3. a) 6, − 5 b) 1, $\frac{-4}{5}$ c) $\frac{3 \pm \sqrt{41}}{8}$ d) $\frac{5 \pm \sqrt{23}}{2}$

   e) $\frac{13 \pm \sqrt{89}}{4}$ f) $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$ g) $\frac{-1 \pm \sqrt{11}}{6}$ h) $\frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2}$

4. a) $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i$ b) $-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}$ c) $1 \pm \frac{\sqrt{15}}{3}i$ d) $\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i$

   e) $\frac{4}{5} \pm \frac{2\sqrt{41}}{5}i$ f) $\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}i$ g) $\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{31}}{4}i$ h) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i$

5. a) 4, 2 b) $\frac{7}{2}$, −2 c) $2 \pm \sqrt{6}$ d) ±4*i*

   e) 3, −2 f) n'existe pas

6. À discuter

Exercice 2

1. −10 ou 11
2. 7, 10
3. 12, 14, 16 ou −12, −14, −16
4. −22, −20 ou 20, 22
5. 8, 12 ou −12, −8
6. 2,5 m
7. 11, 12, 13 ou −2, −1, 0
8. 16, 18, 20
9. 6 m
10. 10 m
11. 10 m
12. 2,5 m
13. 4 m
14. 15, 20
15. 24, 10
16. 7 élèves
17. 40 pers.
18. 15 km/h
19. 28 km/h
20. 9 cm, 12 cm
21. 6 cm, 8 cm, 10 cm

Exercice 3

1. a) $D = 33$ b) $D = 1$ c) $D = 0$ d) $D = -12$

2. a) $D = 144$; racines réelles distinctes, rationnelles
   b) $D = 0$; racines réelles, égales, rationnelles
   c) $D = 73$; racines réelles, distinctes, irrationnelles
   d) $D = 36$; racines réelles, distinctes, rationnelles
   e) $D = 28$; racines réelles distinctes irrationnelles
   f) $D = -84$; racines imaginaires, distinctes

3. a) k < 9/24
   b) k = 1/4
   c) k > 25/24
   d) k > 3
   e) $k = \pm 4\sqrt{3}$
   e) k < 1/8

Exercice 4

1. a) non b) oui c) non d) oui e) non f) oui

2. a) $-5, -2$ b) $-4, -\frac{3}{2}$ c) $\frac{8}{3}, -\frac{35}{3}$ d) $0, -\frac{3}{5}$

e) $\frac{7}{3}$, 1 f) $\frac{3}{5}$, 0

3. a) -3 b) -10 c) 3 d) $\frac{1}{3}$

4. a) 3, 6 b) $-4-\sqrt{7}$, 18 c) $\frac{11}{2}$, 2

d) $-\frac{5}{18}, -\frac{49}{3}$ e) $-\frac{1}{2}$, -4 f) i = 1 , $-2i - 2$

5. a) $2x^2 + 10x + 1 = 0$ b) $x^2 - 3x - 6 = 0$
c) $8x^2 + 6x + 1 = 0$ d) $x^2 + 6 = 0$

6. a) $x^2 - 6x - 16 = 0$ b) $x^2 - 9 = 0$
c) $x^2 + 8x + 16 = 0$ d) $x^2 - 4x + 1 = 0$
e) $x^2 + 9 = 0$ f) $8x^2 - 20x + 17 = 0$

Exercice 5

1. a) ±2, ±3 b) ±1, ±2i c) 1, 9 d) 1, 4

e) ±1, ±2 f) ±1, 3 g) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}i}{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}i$

h) ±2, ±3i i) $\frac{1}{2}$ j) $-4, -3, 2, 3$

Exercice 6

1. a) $\{x \mid x = 4 \text{ ou } -1\}$ b) $\{x \mid x > 4 \text{ ou } x < -1\}$
c) $\{x \mid -1 < x < 4\}$ d) $\{x \mid x \geq 4 \text{ ou } x \leq -1\}$
e) $\{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$

2. a) $\{x \mid -4 < x < 2\}$

b) $\{x \mid -5 \leq x \leq \frac{3}{2}\}$

c) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

d) $\{x \mid x < -3 \text{ ou } x > \frac{1}{3}\}$

e) $\{x \mid -9 \leq x \leq -3\}$

f) $\{x \mid 0 < x < 3\}$

g) $\{x \mid x \geq \frac{4}{5} \text{ ou } x \leq -\frac{3}{2}\}$

h) $\{x \mid x < -2 \text{ ou } x > 4\}$